Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Απάντηση:

Επειδή, $(1-x)(1+x) = 1-x^2 < 1 \quad (x \neq 0)$

Για $x = \left(\frac{1}{n}\right)^2$ συνάγουμε ότι

$$\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) = 1-\left(\frac{1}{n}\right)^4 < 1$$

Άρα $1+\frac{1}{n^2} < \frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Συνεπώς, $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n < \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Όμως, από την ανισότητα Bernoulli:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \geq 1-\frac{n}{n^2} = 1-\frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Άρα, $1 < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n < \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = 1+\frac{1}{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Συνεπώς, από το Θ. Ισοσυγκλ. ακολουθιών το ζητούμενο όριο ισούται με 1.